684. D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marzzani I., Santi G., Sbaragli S. (2009). Il ruolo dell’epistemololgia dell’insegnante nelle pratiche d’insegnamento. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 32B, 2, 171-192.

IL RUOLO DELL’EPISTEMOLOGIA DELL’INSEGNANTE NELLE PRATICHE D’INSEGNAMENTO

Abstract. There are different epistemologies that take part into the didactic action; for this reason an aware and significant epistemological training plays an extraordinary role in teachers’ training. Concepts like milieu and obstacles (epistemological and didactical) work out to be useful for such training. In this work we deal with this issue and we provide significant examples that show how a defective epistemological preparation negatively influences the classroom action. In this ambit, the didactical contract is also taken into account.

Key words. teacher’s epistemology; milieu; epistemological obstacles; didactical obstacles; didactical contract.

Bruno D’Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Ines Marazzani, George Santi, Silvia Sbaragli

IL RUOLO DELL'EPISTEMOLOGIA DELL'INSEGNANTE NELLE PRATICHE D'INSEGNAMENTO[1]

Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Ines Marazzani, George Santi, Silvia Sbaragli

N.R.D. – Università di Bologna

1. Verso una didattica intesa come epistemologia dell'insegnante

Il termine "epistemologia" e le sue diverse accezioni sono entrati a far parte della didattica della matematica alla fine degli anni '60 e hanno dato luogo a una molteplicità di "definizioni" e di interpretazioni nel mondo, nei contesti più diversi. Rinviamo a Brousseau (2006a, b) per un'analisi critica comparata di tale termine e delle sue diverse occorrenze.
Un'analisi approfondita dell'epistemologia dell'insegnante richiede

[1] Il tema trattato in questo articolo è stato proposto sotto forma di comunicazione al Colloque International (con referee): "Les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation. Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats?", svoltosi i giorni 18, 19 e 20 settembre 2008 a Bordeaux (Francia), presso l'Università Bordeaux 4. Essendo stato accettato, la comunicazione è avvenuta il 18 settembre. Il testo in lingua francese, di cui questo è un ampliamento, ha dunque la seguente citazione:
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Santi G., Sbaragli S. (2008). Le rôle de l'épistémologie de l'enseignant dans les pratiques d'enseignement. Atti su DVD del Colloque International (con referee): "Les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation. Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats?". 18, 19, 20 settembre 2008. Bordeaux (Francia), Università Bordeaux 4.

di articolare la nozione di epistemologia con quella di convinzione, concezione, sapere e conoscenza.

Con *concezione epistemologica* indichiamo un insieme di convinzioni, di conoscenze e di saperi scientifici, che tendono a dire che cosa sono le conoscenze dei singoli o di gruppi di persone, il loro funzionamento, i modi per stabilire la loro validità, di acquisirle e quindi di insegnarle e di apprenderle. L'epistemologia è un tentativo di identificare e di unificare concezioni epistemologiche diverse relative a determinate scienze, a movimenti di pensiero, a gruppi di persone, a istituzioni o a culture.

Per i termini che seguono, ci serviamo delle definizioni date in D'Amore, Fandiño Pinilla (2004):

- *convinzione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi e di attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;
- l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T. Spesso, in luogo di "concezione di A relativamente a T" si parla di "immagine che A ha di T".

Per *sapere* intendiamo un insieme di conoscenze o di atteggiamenti riproducibili, acquisiti attraverso lo studio o l'esperienza.
Si possono distinguere i *saperi* dalle *conoscenze*:

- per *saperi* si intendono i dati, i concetti, le procedure, i metodi che esistono al di fuori di ogni soggetto che conosce e che sono generalmente codificati in opere di riferimento, manuali, enciclopedie, dizionari;
- le *conoscenze* sono indissociabili da un soggetto conoscente; non esiste cioè una conoscenza a-personale; una persona che interiorizza un sapere *prendendone coscienza*, trasforma

questo sapere in conoscenza.

Brousseau introduce la nozione di *epistemologia scolastica* per designare l'insieme delle convinzioni - esplicite o implicite - che circolano nella scuola, sui metodi, sugli oggetti e sulla finalità delle conoscenze, degli insegnamenti e degli apprendimenti. L'*epistemologia scolastica* influenza l'attività didattica e di programmazione in quanto influisce profondamente sulla scelta dei saperi da insegnare, sulle metodologie da adottare e sui modelli di apprendimento in base ai quali organizzare l'insegnamento.
Questa deve essere distinta da l'*epistemologia della società* che si esplicita in alcuni obblighi come ad esempio l'obbligo del risultato, la regola delle condizioni preliminari sufficienti, la regola dell'ottimizzazione e la norma di passaggio da una tappa alla seguente; queste nozioni sono trattate in modo approfondito in (Brousseau, 2008a, b).

Le concezioni epistemologiche portano gli insegnanti, spesso inconsciamente, a pratiche d'insegnamento inadeguato che rimandano l'allievo in difficoltà ad un apprendimento personale molto faticoso che lo allontana dal processo di apprendimento. Le concezioni epistemologiche degli insegnanti si esplicitano in una serie di comportamenti e credenze come per esempio:

- l'insegnante deve avere insegnato tutto ciò che, a suo giudizio, si deve sapere;
- l'allievo deve ricordarsi tutto ciò che l'insegnante ha detto;
- e dunque che bisognerebbe imparare tutto a memoria;
- o, al contrario, inventare sul momento o indovinare la risposta richiesta;
- o, inversamente, che quando si è capito, si sa, e che non c'è bisogno di studiare;
- o che cercare una soluzione consiste nell'aspettare che sopraggiunga un'idea…

Questi comportamenti didattici non riconosciuti come tali, nella maggioranza dei casi, tendono a sviare l'attività didattica dalla sua finalità specificamente matematica e portano spesso a strategie di evitamento sistematizzate da Brousseau in termini di *"effetti"* con i quali gli insegnanti cercano e accettano risposte formalmente corrette, anche se ottenute con mezzi retorici senza grande valore cognitivo né didattico come suggerire la risposta all'allievo (effetto Topaze) (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2009), accettare una falsa ragione, o una parafrasi (effetto Jourdain), utilizzare abusivamente analogie, o l'ostensione, frammentare indefinitamente il sapere da apprendere, … (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008).
Non vogliamo approfondire ulteriormente in questa sede la questione; diciamo solo che anche la valutazione è fortemente influenzata dalle concezioni epistemologiche degli insegnanti. Solo per fare un esempio, l'idea di valutazione influenzata dall'epistemologia della società ha portato a somministrare test formali standardizzati, più facili da effettuare, da compilare e da analizzare superficialmente. Questo approccio alla valutazione ha portato ad alcuni effetti ampiamente previsti da Brousseau che hanno trovato conferma nella pratica scolastica. Ne elenchiamo alcuni:
i) La sotto valutazione degli allievi. In effetti, per definizione, le conoscenze non possono essere valutate fuori dalle situazioni e in particolare per mezzo dei test standard. Oggi, la valutazione interpreta come uno scacco il minimo scarto in rapporto alla norma di apprendimento, da cui una proliferazione drammatica delle "constatazioni" di fallimento.
ii) L'allungamento senza limiti del tempo d'insegnamento. A ogni "fallimento" l'insegnante si sente obbligato a far riprendere l'apprendimento completo fino a raggiungere la forma di "sapere" della conoscenza. Ma vi sono altre cause di allungamento: l'individualizzazione dell'insegnamento e la frammentazione del sapere.

iii) L'individualizzazione dell'insegnamento. In realtà, questo allungamento del tempo di apprendimento individuale cresce ancora perché l'insegnante *deve* creare, ufficialmente o de facto, gruppi di livello. Il processo sfocia in un insegnamento individuale. Il tempo che un insegnante può dedicare a ogni allievo è allora insignificante se questi non è un precettore, cioè un insegnante privato a domicilio. (E i precettori sono privati della possibilità di beneficiare di processi reali di costruzione della matematica).
iv) La frammentazione del sapere. Ogni "fallimento" conduce a una decomposizione in saperi "più elementari" sempre più difficilmente collegabili tra loro. L'allungamento del tempo d'insegnamento conduce a sua volta a conseguenze disastrose in situazione di insegnamento/apprendimento.
v) La concentrazione sui saperi (di basso livello tassonomico) e dunque su processi di apprendimento di basso rendimento (comportamentismo), aumenta ancora i bisogni di tempo d'insegnamento.
vi) Conseguenze sociali. Sono confermate dalle *domande ripetute di alleggerimento* dei curricoli o del numero degli obiettivi da parte degli insegnanti.

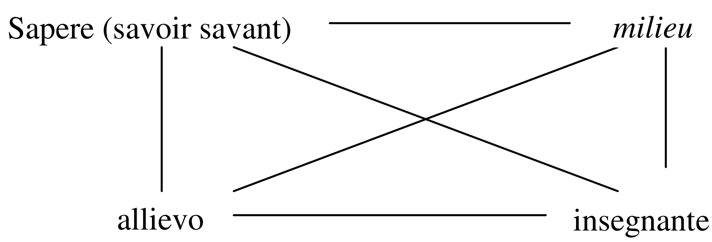
Dopo un inquadramento generale del ruolo delle concezioni epistemologiche, vogliamo ora descrivere alcuni elementi della didattica della matematica che sono fortemente correlati con l'epistemologia degli insegnanti e che hanno il potere di modificarla in senso positivo. Analizzeremo nozioni classiche come quella di milieu e di situazione didattica, di ostacolo epistemologico in relazione all'epistemologia spontanea degli insegnanti, e quella di contratto didattico al fine di evidenziare come i sistemi di convinzioni influiscono in modo decisivo sui processi di insegnamento e apprendimento.

2. Il milieu

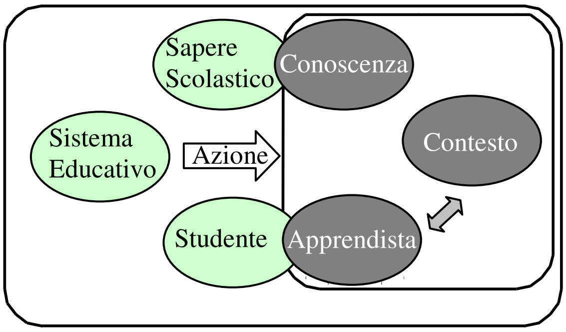
Dalla teoria delle situazioni sappiamo che l'insegnante deve suscitare nell'allievo comportamenti che l'allievo stesso, per manifestare la sua conoscenza, dovrebbe assumere autonomamente. Sembra un paradosso. Anzi: è un paradosso. L'unica soluzione della teoria delle situazioni consiste nel coinvolgere un terzo elemento, il *milieu*, e fare in modo che la risposta dell'allievo sia esclusivamente riferita alle necessità del *milieu*.
L'abilità dell'insegnante sta allora nell'organizzazione di una relazione tra allievo e *milieu*, che:

- da una parte, lascia una ragionevole incertezza che le conoscenze del soggetto deve ridurre;
- dall'altra parte, fa in modo che tale riduzione possa davvero avvenire, cioè con un grado di incertezza limitato, dal punto di vista dell'insegnante.

Il concetto di milieu permette di elaborare lo schema che chiameremo *quadrilatero della didattica*:



Questo schema rivela la sua insufficienza non appena si consideri che in esso non si evidenzia la differenza fra i "saperi" scolastici, da insegnare o insegnati, e le "conoscenze" dell'allievo, che non coincidono tra loro e che funzionano secondo modalità diverse; inoltre, anche le peculiarità delle attività del soggetto che apprende sono diverse, il che porta ad avere quanto meno un "esagono della didattica", reso da Guy Brousseau in questo schema che evidenzia il suo significato funzionale.



3. Ostacoli epistemologici

Gli studi sull'apprendimento dei numeri naturali di Brousseau, dai primi anni '60 a tutti gli anni '80, hanno evidenziato che tale apprendimento avviene per salti di complessità "informazionali" e che tale fenomeno poteva essere generalizzabile in matematica.
Furono questi tipi di studi che portarono, in opposizione a quanto dichiarava Gaston Bachelard (1938) a proposito dell'inesistenza in matematica degli ostacoli epistemologici, a far approdare invece questo concetto in seno alla ricerca didattica. La comprensione dei numeri naturali esige, per esempio, un certo modo di concepire questi numeri e le loro operazioni: un numero naturale come 4 ha un successivo, il suo prodotto per un altro numero naturale sarà più grande di esso eccetera. Alcune di queste proprietà diventano errate quando 4 diventa un numero razionale: per esempio, non ha più il successivo. Ma lo studente non si dà conto di questo passaggio e continua a "forzare" le proprietà di N anche a Q; è per questo che si

trovano studenti che asseriscono, in Q, che 2,33 è il successivo di 2,32 (aiutati in ciò perfino da alcuni libri di testo). Inoltre, per esempio, $0,7 \times 0,8 = 0,56$ dove 0,56 è più piccolo di ciascuno dei fattori, novità sconcertante che mette in crisi la conoscenza precedentemente acquisita.

Lo studente, dicevamo, quasi non si accorge di questa trasformazione di sapere. L'insegnante chiama "moltiplicazione" o "divisione" nuove operazioni che vorrebbe che gli allievi "riconoscessero" e assimilassero alle precedenti. La conoscenza dei numeri naturali è indispensabile per acquisire quella dei razionali ma, nello stesso tempo, è un ostacolo a questa acquisizione. Questo fenomeno crea malintesi e difficoltà importanti e invisibili poiché l'ostacolo si nasconde all'interno di un sapere che funziona ma che è "locale" e non generalizzabile all'oggetto matematico che si dovrebbe apprendere.

Questo è il senso stesso dell'idea di *ostacolo epistemologico*. La nozione di ostacolo epistemologico contribuisce a formare la concezione epistemologica dell'insegnante e gioca un ruolo chiave nella trasformazione del sapere in conoscenza. Risulta, quindi, essenziale assicurare ai futuri docenti di matematica un'adeguata preparazione storica ed epistemologica. Occorre, tuttavia, tenere presente che quest'ultima si innesta in una epistemologia che si può chiamare *epistemologia spontanea degli insegnanti* (Speranza, 1997; Brousseau, 2006a).

Nel momento di prendere le loro decisioni in aula, gli insegnanti usano esplicitamente o implicitamente ogni tipo di conoscenze, di metodi e di convinzioni sul modo di trovare, di apprendere o di organizzare un sapere. Questo bagaglio epistemologico è essenzialmente costruito empiricamente per rispondere alle necessità didattiche. Questo, a volte, è il solo mezzo di cui gli insegnanti dispongono per proporre i processi didattici scelti e di farli accettare dai loro allievi e dal loro ambiente. L'insieme delle convinzioni degli insegnanti, degli allievi o dei genitori su ciò che conviene fare per insegnare, per apprendere e per comprendere i saperi in gioco, costituisce una *epistemologia* pratica che è impossibile ignorare ed eliminare. L'epistemologia filosofica o scientifica è ben lontana dal poter pretendere di assumere questo ruolo.

L'epistemologia spontanea fonda le sue radici su una pratica antica: la tendenza a comunicare esperienze da una generazione alla successiva è caratteristica essenziale dell'umanità. Sarebbe assurdo opporla alle conoscenze scientifiche: occorre rispettarla, comprenderla e studiarla sperimentalmente, come un fenomeno naturale.

L'introduzione dell'epistemologia e delle teorie scientifiche afferenti alla formazione degli insegnanti si presenta allora in un aspetto nuovo (D'Amore, 2004).

Un situazione in cui si vede il funzionamento dei due tipi di epistemologie è quella in cui l'insegnante ricorre all'analogia per aiutare l'allievo in difficoltà. Dopo opportuni rinforzi l'insegnante propone una situazione analoga in cui l'allievo, opportunamente "addestrato", risolverà il problema con successo. Si tratta di una frode epistemologica, perché l'allievo risponde correttamente, senza che ci sia stato un reale e robusto apprendimento consapevole che sta assecondando le aspettative dell'insegnante. Si tratta dell'"effetto Jourdain" citato sopra.

L'attività dell'allievo deve rispondere dunque a due costrizioni incompatibili:

- quella determinata dalle condizioni a-didattiche che determinano una risposta originale e l'organizzazione di conoscenze specifiche;
- quella determinata dalle condizioni didattiche che hanno come scopo di far produrre la risposta attesa, indipendentemente dalla sua modalità di produzione.

Questo esempio mostra che se l'epistemologia e le scienze cognitive possono studiare, dare ragione, delle risposte degli allievi sotto la sola prima costrizione, esse non possono pretendere di aiutare gli insegnanti ignorando la seconda. Le costrizioni didattiche finiranno con l'opprimere le costrizioni cognitive. Esse trasformano la natura stessa delle conoscenze ed il loro funzionamento. L'insegnamento diventa così una simulazione della genesi delle conoscenze. Questa tematica mostra la complessità dell'epistemologia dell'insegnante che non può ridursi ad una dimensione puramente cognitiva o epistemologica, ma chiama in causa la complessità dei processi di insegnamento e apprendimento che il docente deve gestire.

4. Il contratto didattico

Il contratto didattico, per la sua forza e per le sue implicazioni, mostra come un sistema di attese, convinzioni e interpretazioni sulla matematica, influenzate anche dall'epistemologia dell'insegnante, hanno effetti pesanti, inaspettati e sorprendenti nell'apprendimento della matematica.
In una ricerca sui problemi con dati mancanti e sugli atteggiamenti degli allievi di fronte a problemi di questo tipo (D'Amore, Sandri, 1998) ecco un testo proposto in III primaria (allievi di 8-9 anni) ed in II media (allievi di 12-13 anni):
«Giovanna e Paola vanno a fare la spesa; Giovanna spende 10.000 lire e Paola spende 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?».
Ed ecco un prototipo del genere di risposte più diffuse in III primaria; scegliamo il protocollo di risposta di Stefania, che riportiamo esattamente come lo ha redatto l'allieva:

> Stefania:
>
> Nel borsellino rimane più soldi giovanna
> 30-10=20
> 10×10=100

Trattandosi di un "contratto", da tempo rintracciamo delle "costanti di comportamento" che si possono chiamare "clausole"; nel caso in questione giocano un ruolo formidabile due di esse:

- *clausola delle attese*: la maestra si aspetta certo una risposta, dunque devo fornirla, non importa il senso del testo;
- *clausola della costanza*: la maestra ha *sempre* dato problemi con un testo scritto a parole e con dei numeri e, per produrre il risultato, ho *sempre* operato su quei numeri con delle operazioni; se è *sempre* andata così, dovrà per forza andare così *anche* questa volta.

La risposta "Giovanna" (58,4% di tali risposte in III primaria, età degli allievi 8-9 anni) è giustificata dal fatto che lo studente ritiene che, se l'insegnante affida un problema, questo *debba poter essere risolto*; dunque, anche se si accorge che manca il dato della somma iniziale, se lo inventa implicitamente più o meno come segue: «Questo problema *deve* essere risolto; dunque, forse Giovanna e Paola partivano dalla stessa somma». A quel punto, *la risposta è corretta*: Giovanna spende meno e quindi le resta più danaro. E ciò giustifica la parte scritta della risposta di Stefania. Dopo di che scatta un altro meccanismo legato ad un'altra clausola (del tipo: immagine della matematica, attese presupposte da parte dell'insegnante): «Non può bastare così, in matematica si devono fare dei calcoli, la maestra se li aspetta di certo». A quel punto, il controllo critico crolla e... qualsiasi calcolo va bene.
Nel lavoro D'Amore, Sandri (1998) (ed in lavori successivi), abbiamo chiamato questa clausola del contratto didattico: "esigenza della giustificazione formale" (egf), studiandola in ogni dettaglio. Tale clausola egf è molto presente anche nella scuola media (età degli allievi: 11-14 anni). [La percentuale di risposte "Giovanna" scende dal 58,4% della III primaria (8-9 anni) al 24,4% della II media (12-13 anni); ma solo il 63,5% degli allievi di II media denuncia in qualche modo l'impossibilità di dare una risposta; dunque il 36,7% dà una risposta: oltre 1/3 in media].

Ecco un prototipo di risposta avuta allo stesso problema in II media; abbiamo scelto il protocollo di risposta di un'allieva, riportandolo esattamente come da lei prodotto:

> Silvia:
>
> Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è Giovanna
perché:
Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende 20.000,
10.000 20.00
Giovanna Paola
20.000-10.000=10.000 (soldi di Giovanna)
10.000+10.000=20.000 (soldi di Paola)

Nel protocollo di Silvia si riconoscono in azione le stesse clausole del contratto didattico messe in opera nel protocollo di Stefania, ma la sua analisi è più complessa. Per prima cosa, si nota un tentativo di organizzazione logica e formale più impegnativo. Silvia, poi, dapprima scrive spontaneamente "Giovanna" senza fare alcun calcolo, perché ha ragionato come Stefania; poi, però, a causa della clausola egf, ritiene di *dover* produrre calcoli. È probabile che si renda conto, anche se in modo confuso, che le operazioni che sta facendo sono slegate dalla logica del problema, le fa solo perché ritiene di *dover fare* qualche calcolo. Ma, per quanto assurde, finisce con assumerle come fossero plausibili: tanto è vero che, dato che da questi calcoli insensati ottiene un risultato che contrasta con quello dato per via intuitiva, preferisce violentare la propria intuizione ed accetta piuttosto quanto ottenuto per via formale: i calcoli le danno "Paola" come risposta e non "Giovanna", come invece aveva supposto; e dunque barra "Giovanna" ed al suo posto scrive "Paola":

> Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è ~~Giovanna~~ Paola
perché:
Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende 20.000,
10.000 20.00
Giovanna Paola
20.000-10.000=10.000 (soldi di Giovanna)
10.000+10.000=20.000 (soldi di Paola)

Il contratto didattico, che questa volta è dettato da una immagine formale (a vuoto, deleteria) della matematica, ha vinto, sconfiggendo la ragione...

5. Esempi di erronee convinzioni di insegnanti

Negli ultimi anni, numerose ricerche si sono occupate dell'analisi delle convinzioni e dei cambi di convinzioni degli insegnanti su vari argomenti matematici; tali ricerche hanno messo in evidenza quanto le convinzioni degli insegnanti condizionano le pratiche d'aula. Si percepisce cioè una relazione causale tra convinzioni e *misconcezioni*, dato che spesso le *misconcezioni* degli allievi derivano direttamente da *misconcezioni* dei docenti e dalle loro convinzioni, secondo una sequenza come la seguente: convinzione del docente → misconcezione del docente → misconcezione dell'allievo → convinzione dell'allievo.
Mostriamo alcuni esempi da questo punto di vista.

5.1. *Infinito*

In Sbaragli (2006) viene proposta la sintesi di un lavoro di ricerca durato vari anni riguardante le convinzioni, ed i cambi di convinzioni, degli insegnanti di scuola primaria relativi all'infinito matematico. In particolare, si è messo in evidenza come tale argomento risulta essere sconosciuto da parte degli insegnanti di questo livello scolastico sia dal punto di vista matematico-epistemologico che cognitivo; per questo si possono rintracciare, tra le convinzioni possedute da questi insegnanti, numerose misconcezioni che rientrano in diversi àmbiti della matematica. Inoltre, l'eventuale cambio di convinzione che avviene in alcuni di questi insegnanti, posti a contatto con una elementare trattazione matematica dell'infinito matematico, mette ancora di più in evidenza come le conoscenze sull'infinito matematico si basino solo su convinzioni spontanee ed intuitive, basate sul buon senso. Si ha, come conseguenza, l'esplicitazione da parte degli insegnanti di un forte personale disagio nei confronti di questo tipo di sapere, disagio che ha negative ripercussioni sulla trasposizione didattica.

Proponiamo un esempio di misconcezione. Alla domanda: *Ci sono più punti nel segmento AB o nel segmento CD?* (segmenti disegnati in un foglio e tali che CD ha maggior lunghezza di AB), i 16 insegnanti intervistati rispondono con affermazioni del tipo:

B.: Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore.

Ric.: Quanti in più?

B.: Dipende quanto li fai grandi.

M.: Anche da come li fai larghi o attaccati; ma se li avvicini al massimo e li fai grandi uguali ce ne sono di più in CD.

Da queste affermazioni risulta presente il cosiddetto "modello della collana" che si basa sull'idea di segmento concepito come un filo formata da minuscole perline-punti, a contatto l'una con l'altra; modello già messo in evidenza in numerose precedenti ricerche (Arrigo e D'Amore, 1999, 2002).

Tali ricerche hanno ampiamente evidenziato che studenti maturi (scuole superiori) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa di questo modello intuitivo persistente. Tramite le affermazioni fornite dagli insegnanti, siamo riusciti a mettere in evidenza che tale modello non rappresenta solo uno stratagemma didattico preliminare a qualche cosa di più corretto, usato dagli insegnanti per fornire ai propri studenti un'idea di segmento, con la consapevolezza però che questa è solo un'approssimativa immagine assai distante dal reale concetto matematico di segmento, bensì appare come l'effettivo modello che gli insegnanti stessi hanno di segmento e di punto e che dunque forniscono come modello definitivo ai propri studenti. Inoltre, dalle conversazioni risultano lampanti diverse manchevolezze nelle competenze degli insegnanti, legate soprattutto ai concetti di densità e di continuità dell'insieme ordinato dei punti della retta.

Lacune su questo tema non sono un problema esclusivo della scuola primaria, ma sono invece diffuse ad ogni livello scolastico, tra tutti quegli insegnanti a cui non è stata data l'occasione di riflettere epistemologicamente su questo argomento.
In un successivo lavoro su questo tema (Sbaragli, 2007), l'autrice raccoglie manifestazioni di disagio degli insegnanti nella costruzione concettuale su questo stesso tema.
Ad esempio, alcuni insegnanti dichiarano di esplicitare ai propri allievi affermazioni che rientrano nella misconcezione di *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici:
A.: Dico ai miei bambini che tutti i numeri: 0, 1, 2, 3, … sono il doppio dei pari perché mancano tutti i dispari. E poi dico che se aggiungiamo i negativi abbiamo ancora altri infiniti numeri in più rispetto a 0, 1, 2, ….
Questo fenomeno di dipendenza si basa nel ritenere sempre vera l'VIII nozione comune di Euclide: *Il tutto è maggiore della parte*, sia per il finito che per l'infinito.
Questi esempi dimostrano inoltre come le intuizioni degli insegnanti siano distanti dal "sapere istituzionale" auspicato dalla matematica e come tali misconcezioni vengano trasferite agli allievi durante l'azione in classe, comportando così ricadute sull'apprendimento degli allievi che emergono soprattutto nei livelli scolastici successivi.

5.2. *Perimetro e Area*

Sia nel libro di Fandiño Pinilla, D'Amore (2007), sia nella ricerca che lo ha preceduto e reso poi possibile (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005), si evidenziano errori degli studenti nel valutare le relazioni tra area e perimetro di figure piane tendendo acriticamente a dedurre scorrettamente maggiorazioni o minorazioni tra entità poste in relazione.

Per esempio, la letteratura ha ampiamente mostrato come molti studenti di ogni età siano convinti che vi sia una relazione di dipendenza stretta tra i due concetti sul piano relazionale, del tipo:

Se A e B sono due figure piane, allora:
- se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)
- idem con <
- idem con = (per cui: due figure isoperimetriche sono necessariamente equiestese);
- e viceversa, scambiando l'ordine "perimetro – area" con "area – perimetro".

Una ricerca effettuata sugli insegnanti di quegli stessi allievi ha ampiamente mostrato che questo preconcetto albergava anche nelle convinzioni dei docenti. Come si vede, da un lato le convinzioni degli insegnanti influenzano nettamente quelle degli studenti; dall'altro, c'è però disponibilità a modificare le proprie convinzioni anche di tipo contenutistico.
Queste relazioni forzate tra i concetti di perimetro ed area di figure piane sono rintracciabili nella storia più antica, anche nel mito e nella leggenda; tanto da potersi dire che perimetro, area e reciproche relazioni costituiscono ostacoli epistemologici. Se si esaminano le convinzioni che gli insegnanti (di qualsiasi livello scolastico), hanno a questo proposito, si capisce subito perché tali oggetti matematici siano diffusamente trattati in modo tale da costituire anche ostacoli didattici.

5.3. *Frazioni*

Sia nel libro Fandiño Pinilla (2005), sia nei lavori di ricerca che lo hanno preceduto (ivi citati), sia nei lavori di ricerca che lo hanno seguito (si veda, per esempio, Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli, 2006), si evidenziano una infinità di "errori" specifici di studenti che la letteratura aveva studiato da decenni, classificandoli da un puro punto di vista matematico e dunque senza proposte efficaci sul piano didattico.

Le ricerche preliminari e forse, ancor più, le successive, come quella indicata, hanno ampiamente mostrato ancora una volta come l'errore dello studente abbia motivazioni e cause che risiedono nelle convinzioni degli insegnanti.

In effetti, in Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli (2006) si propone il rendiconto di un'esperienza di apprendimento e di ricerca – azione messa in atto da parte di un gruppo di 36 insegnanti (di scuola dell'infanzia, primaria, secondaria di I grado). Il tema delle frazioni, considerato da tutti come di complessa costruzione concettuale da parte degli studenti, ma di non difficile rilievo matematico, è stato affrontato dapprima in corsi di formazione e poi in momenti di studio collettivo, seguendo il testo Fandiño Pinilla (2005). Lo studio consapevole e adulto, dai punti di vista matematico, epistemologico e didattico, ha portato le componenti del gruppo ad esprimere le loro convinzioni matematiche, epistemologiche e didattiche preliminari, a prendere coscienza di cambiamenti anche notevoli circa tali convinzioni; il che ha costretto, sempre in àmbito di ricerca - azione, a rivedere le proprie posizioni per quanto concerne la trasposizione didattica delle frazioni. La metodologia scelta per questo resoconto è la metodologia della riflessione personale (che alcuni chiamano "autobiografia").

Per esempio, ben pochi degli insegnanti intervistati avevano inizialmente mai riflettuto sul fatto che il tipico "uguale" che si cita nella definizione di frazione, quando appunto una unità viene divisa in parti "uguali", è un termine piuttosto generico che va variamente interpretato a seconda dei contesti, almeno quei 12 contesti assai diversi che il primo libro mette in evidenza.

Per esempio, se si tratta di dividere una figura piana in parti "uguali" in realtà si intende dire "equiestese"; se si divide una raccolta di persone in parti "uguali" in realtà ci si riferisce solo al numero; se si divide un numero in parti uguali, allora si tratta di effettuare una operazione di divisione (ed è spesso incerto se si vuol parlare di N o di Q, dato che l'operazione di divisione non è interna ad N); etc.

Eppure gli insegnanti affermavano inizialmente:

S.: *La frazione è un'operazione che mi permette di dividere un intero in parti uguali.*

A.: *Per me la frazione è una cosa che si divide in parti uguali, più o meno una divisione. Solo che la frazione divide 1 cosa (una torta, un cerchio, una caramella, un oggetto), mentre la divisione divide più cose (numeri, oggetti...).*

C.: *Il giorno in cui sono arrivata con la crostata, i miei alunni, erano 17 così, per dividerla meglio, mi sono aggiunta anch'io!*

Dopo il percorso seguito, che ha comportato un notevole cambio di convinzioni negli insegnanti, le affermazioni sono state del tipo:

A.: *Secondo noi quella torta divisa in tante fette tutte "uguali" era un'immagine efficace, faceva capire bene il rapporto tra l'intero e le sue parti, si fissava subito nella mente dei nostri allievi e sentivamo di poter passare subito alla definizione che cristallizzava il "concetto" di frazione. Ora mi sono resa conto che questa definizione è imprecisa e non tiene conto dei numerosi significati che la frazione può assumere e dei vari contesti d'uso. Inoltre è così facile che si fissa immediatamente: pensavo che questo fosse un vantaggio, invece mi sono resa conto che genera difficoltà.*

D.: *È vero, quella "maledetta torta" portata a scuola e che pensavo funzionasse tanto bene, è rimasta indelebile nella loro mente, ero convinta che bastasse insegnare le frazioni così come le avevo imparate io, ma mi sbagliavo… quanto mi sbagliavo!*

Le considerazioni che a questo punto potrebbero seguire sono del tutto identiche a quelle fatte per gli esempi precedenti. Per le frazioni sembrerebbero non esservi cenno di ostacoli epistemologici poiché la presa in carico di esse da parte della comunità matematica è avvenuto in tempi remoti (fin dall'Egitto del ¯2000 e forse prima), ma uno studio storico attento e critico mostra, invece, che non è così. L'idea di frazione ha costituito momenti di rottura notevole e di forte crisi nell'evoluzione della storia della matematica (Fandiño Pinilla, 2005), inoltre come abbiamo rilevato in questa ricerca le frazioni costituiscono un notevole ostacolo didattico.

7. Conclusioni

La formazione degli insegnanti è un tema che riveste sempre più importanza non solo per quello che riguarda la ricerca in didattica della matematica, ma anche per le sue implicazione pedagogiche e sociali che coinvolgono il triangolo della didattica e la noosfera in cui il triangolo è inserito. Senza risultati di ricerca soddisfacenti in questo àmbito di ricerca, difficilmente si riuscirà a superare le difficoltà cognitive e l'avversione affettiva che la maggior parte degli studenti prova nei confronti della matematica. Lo sviluppo della didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica sembra essere un quadro teorico adeguato ad accogliere e gestire la complessità di questo filone di ricerca. L'epistemologia dell'insegnante, che abbiamo delineato come sistema di convinzioni che informano pesantemente i processi di insegnamento e apprendimento della matematica, interagisce con tutti le variabili del sistema didattico. In questo lavoro abbiamo mostrato la relazione tra le concezioni epistemologiche dell'insegnante e alcuni elementi caratteristici della didattica della matematica evidenziando come l'assenza di una cultura epistemologica adeguata dell'insegnante rischia di allontanarlo dagli obiettivi della didattica. L'insegnamento della matematica si riduce ad un insieme di tecniche scorrelate che permettono al più di conseguire risultati di apprendimento deboli e poco significativi.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo ma non ci credo...". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-57.

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, Vrin.

Brousseau G. (2006a). Epistemologia e didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*. 4, 621-655.

Brousseau G. (2006b). Epistemologia e formazione degli insegnanti. In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, venti anni di impegno*. Atti del Convegno internazionale omonimo. Castel San Pietro Terme, 23 settembre 2006. Bologna: Pitagora. 54-58. Pubblicato inoltre su: D'Amore B. (ed.) (2006). *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione*. Numero speciale monotematico di *Rassegna*. 29, 29-33.

Brousseau G. (2008a). L'epistemologia scolastica spontanea e la cultura dei problemi matematici. *La matematica e la sua didattica.* 22, 2, 165-183.

Brousseau G. (2008b). *Ingegneria didattica ed epistemologia dell'insegnante*. A cura di Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora.

Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.

D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30. In lingua spagnola (2004):

El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon*. 60, 20, 3, 413-434.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50. 30. In lingua spagnola (2004): Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Espilon*. 58, 20, 1, 25-43.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Area e perimetro. Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 165-190.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). L'effetto Topaze. In corso di stampa.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.
D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-18. In lingua francese (1998): *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 55-94.
Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B. (2007). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.
Sbaragli S. (2006). Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.* 5, 2, 49-76.
Sbaragli S. (2007). Le "proposte" degli insegnanti di scuola primaria concernenti l'infinito matematico. In: Giacardi L., Mosca M., Robutti O. (2007). *Conferenze e seminari 2006-2007.* 73-87.
Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Contacts: damore@dm.unibo.it – www.dm.unibo.it/rsddm